1. Übung zu Methoden der Signalverarbeitung

Einführung

Aufgabe 1: Wahrscheinlichkeit

Mit Hilfe zweier Abfüllmaschinen werden Flaschen mit Wasser befüllt. Hierbei soll pro Flasche 1 l eingefüllt werden. Aufgrund von Verzögerungen beim Öffnen und Schließen der Ventile kann mit diesen Maschinen die Abfüllmenge nur mit einer Standardabweichung von 0,06 l eingehalten werden. Der systematische Fehler sei vernachlässigbar.

a) Es ist bekannt, dass das abgefüllte Volumen bei einer der Maschinen einer Gleichverteilung folgt. Ist es wahrscheinlicher, dass eine Flasche mit etwa 0,9 l oder etwa 0,8 l befüllt wird? Bestimmen Sie hierzu die Intervallbreite der Gleichverteilung.

b) Bei der anderen Maschine folgt das Volumen der eingefüllte Wassermenge einer Normalverteilung. Ist es wahrscheinlicher, dass eine Flasche mit etwa 0,9 l oder etwa 0,8 l befüllt wird?

c) Welcher der beiden Maschinen würden Sie kaufen, wenn Sie möglichst genau 1 l einfüllen sollen?

Aufgabe 2: Korrelation und Kovarianz diskreter Zeitsignale

Gegeben sind die Signale $y_1(n)$ und $y_2(n)$, die als Realisierungen eines Zufallsprozesses angesehen werden können:

n	$y_1(n)$	$y_2(n)$
1	6	8
2	4	8
3	2	6
4	8	6
5	8	4
6	6	2

a) Bestimmen Sie die Werte der Korrelationsfunktion $r_{y_1 y_2}(k)$ für die Zeitverschiebungen $k \in \{-3, 0, 3\}$.

b) Bestimmen Sie die Werte der Kovarianzfunktion $C_{y_1 y_2}(k)$ für die Zeitverschiebungen $k \in \{-3, 0, 3\}$. Bei welcher der drei betrachteten Zeitverschiebungen besitzen die Signale die größte Abhängigkeit? Wie lässt sich der Unterschied zu den berechneten Korrelationswerten erklären?

Aufgabe 3: Korrelation und Kovarianz zweidimensionaler Signale

Es soll die 2D-Position eines Objektes geschätzt werden. Dazu wird zu drei unterschiedlichen Zeitpunkten (t_0, t_1, t_2) mit Hilfe von vier Sensoren jeweils eine Messung durchgeführt:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1(t_0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{x}_2(t_0) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{x}_3(t_0) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{x}_4(t_0) &= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{x}_1(t_1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{x}_2(t_1) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{x}_3(t_1) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{x}_4(t_1) &= \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{x}_1(t_2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{x}_2(t_2) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{x}_3(t_2) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}, & \boldsymbol{x}_4(t_2) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die Messungen können als Realisierungen eines Zufallsvektors $\boldsymbol{X}$ aufgefasst werden.

a) Schätzen Sie die Autokorrelationsmatrizen $\hat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{xx}}(t)$ zu den Zeitpunkten t_0, t_1, t_2 aus den Beobachtungen $\boldsymbol{x}_i(t)\,,\; i = 1, 2, 3, 4$.

b) Schätzen Sie die Autokovarianzmatrizen $\hat{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{xx}}(t)$ aus den vier Beobachtungen für jeden Zeitpunkt. Was bedeuten diese Werte anschaulich?